Олимпиада БГУ по математике

19.04.2008.

Время работы 4 часа.

Задача 1. Пусть a – положительное действительное число, отличное от 1. Найти

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^x-1}{x(a-1)}\right)^{1/x}.$$

Задача 2. Пусть n – натуральное число, A – матрица размера $n\times n$ с действительными коэффициентами. Предположим, что $AA^T=E$, где через A^T обозначена матрица, транспонированная к A, а через E единичная матрица. Докажите, что

a) $|\operatorname{tr}(A)|\leqslant n$.

b) Если число n нечетно, то $\det(A^2-E)=0$.

Здесь через $\operatorname{tr}(A)$ обозначен след матрицы A, т.е. сумма всех её диагональных элементов.

Задача 3. Для натурального числа n обозначим через T_n количество перестановок $a_1,\ldots,a_n$ чисел $1,\ldots,n$, для которых $a_i\neq i$ при всех i от 1 до n. Докажите, что

$$T_n=n!\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}.$$

Задача 4. Функция $f:[0,1]\to(0,+\infty)$ нестрого убывает. Докажите, что

$$\int_0^1 xf(x)^2dx\cdot\int_0^1 f(x)dx\leqslant\int_0^1 xf(x)dx\cdot\int_0^1 f(x)^2dx.$$

Задача 5. Пусть A,B – квадратные матрицы с целыми коэффициентами, $\det(A)=1,\det(B)\neq 0$. Докажите, что найдется натуральное число n, для которого матрица BA^nB^{-1} имеет целые коэффициенты.

Задача 6. Найти все комплексные числа z, для которых выполняется равенство

$$\sum_{q=2}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{q}e^{2\pi ikz/q}\right)=z.$$