Устойчивость решений стохастических дифференциальных уравнений в бесконечномерных пространствах

И.В. Качан, научный руководитель М.М. Васьковский

Основная часть работы состоит из двух глав.

В первой главе исследуется устойчивость стохастических дифференциальных уравнений в конечномерных пространствах. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dx(t) = A(t)x(t)dt + f(t, x(t), x_t)dt + g(t, x(t), x_t)dW(t), \tag{1}$$

с постоянным начальным условием $x(t) = \psi(t)$, $t \in [-h, 0]$, где $A : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{d\times d}$ – ограниченная кусочно непрерывная функция, $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times C_h \to \mathbb{R}^d$, $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times C_h \to \mathbb{R}^{d\times d}$ – измеримые по Борелю функции, $f(t, 0, 0) = 0$ и $g(t, 0, 0) = 0$ при всех $t \geqslant 0$, функции f и g имеют линейный порядок роста по (x, φ); $x_t = \{x(t + \tau)| - h \le \tau \le 0\} \in C_h$, $C_h = C([-h, 0], \mathbb{R}^d)$, $h > 0$ – время запаздывания, $\psi(\cdot) \in C_h$, $W(t)$ – d-мерное броуновское движение.

Основной результат первой главы дает

Теорема 1. Предположим, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что выполняются неравенства $|f(t, x, \varphi)| \le \varepsilon|x|$, $|g(t, x, \varphi)| \le \varepsilon|x|$ для любых $x \in \mathbb{R}^d$, $|x| \le \delta$, $t \in \mathbb{R}^+$, $\varphi \in C_h$, а уравнение $dx(t) = A(t)x(t)$ имеет равномерно экспоненциально устойчивое нулевое решение. Тогда уравнение (1) имеет асимптотически устойчивое по вероятности нулевое решение.

Вторая глава посвящена исследованию асимптотического поведения решений стохастических дифференциальных уравнений в бесконечномерных гильбертовых пространствах. На заданном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком σ-алгебр $(\mathcal{F}_t)$, $t \ge 0$, рассмотрим стохастическую эволюционную функциональную задачу Коши

$$dX(t, \omega) = AX(t, \omega)dt+f(t, \omega, X(t, \omega))dt+g(t, \omega, X(t, \omega))dW(t, \omega),\ t \in \mathbb{R}^+,\ X \in H, \tag{2}$$

$$X(0, \omega) = \xi(\omega),\ \omega \in \Omega, \tag{3}$$

где $X(t, \omega) \in H$ — неизвестный случайный процесс; $\xi(\omega) \in H$ — $\mathcal{F}_0$-измеримая случайная величина такая, что $E\|\xi\|^p < \infty$, $p > 2$; $W(t, \omega) \in U$ — $\mathcal{F}_t$-согласованное броуновское движение с ковариационным оператором Q_w; H, U — сепарабельные гильбертовы пространства; A — линейный оператор, определенный на всюду плотном в H множестве $D(A)$ и порождающий C_0-полугруппу $S(t)$, $C_0 = H$; $f : \mathbb{R}^+ \times \Omega \times H \to H$, $g : \mathbb{R}^+ \times \Omega \times H \to L_2(U, H)$ — функции, удовлетворяющие локальному условию Липшица и имеющие линейный порядок роста.

Пусть задана убывающая положительная равномерно непрерывная функция $\lambda(t)$, определенная при достаточно больших $t \ge T > 0$, для которой

$\lim\limits_{t\to\infty}\lambda(t) = \infty$ и существует константа $\tau \geq 0$ такая, что $\lim_{t\to\infty}\sup\frac{\ln\ln t}{\ln\lambda(t)} \leq \tau$. Будем говорить, что решение задачи (2), (3) п.н. устойчиво с порядком $\gamma > 0$, если $\lim_{t\to\infty}\sup\frac{\ln\|X_\xi(t)\|}{\ln\lambda(t)} \leq -\gamma$ п.н. Основной результат второй главы дает

Теорема 2. *Пусть функционал $V(t,x) \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+\times H;\mathbb{R}^+)$ и $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ — две неотрицательные непрерывные функции. Предположим, что существуют положительные постоянные $r > 0$, $m \geq 0$, постоянные $\mu,\nu,\theta \in \mathbb{R}$ и невозрастающая положительная функция $\zeta(t)$ такие, что:*

1. $\|x\|^r(\lambda(t))^m \leq V(t,x)$ *для всех* $(t,x) \in \mathbb{R}^+\times H$.

2. $LV(t,x) + \zeta(t)QV(t,x) \leq \psi_1(t) + \psi_2(t)V(t,x)$ *для всех* $x \in \mathcal{D}(A)$ *и* $t \in \mathbb{R}^+$, *где операторы*

$$LV(t,x) = V_t'(t,x) + \langle V_x'(t,x), Ax + f(t,x)\rangle + \frac{1}{2}\mathrm{tr}[V_{xx}''(t,x)(g(t,x)Q_w^{1/2})(g(t,x)Q_w^{1/2})^*],$$

$$QV(t,x) = \mathrm{tr}[V_{xx}''(t,x)\otimes V_{xx}''(t,x)(g(t,x)Q_w^{1/2})(g(t,x)Q_w^{1/2})^*],$$

3. $\lim_{t\to+\infty}\sup\frac{\ln\left(\int_0^t\psi_1(s)\,ds\right)}{\ln\lambda(t)} \leq \nu$, $\lim_{t\to+\infty}\sup\frac{\int_0^t\psi_2(s)\,ds}{\ln\lambda(t)} \leq \theta$, $\lim_{t\to+\infty}\inf\frac{\ln\zeta(t)}{\ln\lambda(t)} \geq -\mu$.

Тогда решение задачи (2), (3) при п.н. устойчиво с порядком $-\frac{m-(\max\{\nu,\mu+\tau\}+\theta)}{r}$.

Доклады на конференциях. Результаты данной работы докладывались автором на следующих научных конференциях:

1. 8-й международный научный семинар (воркшоп) ”АМАДЕ-2015”, 15 сент. 2015 г., ОСК ”Стайки”.

2. Международная математическая конференция «6-е Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям», 9 дек. 2015 г., БГУ.

3. 12-я Белорусская математическая конференция, 7 сент. 2016 г., БГУ.

Результаты работы включены в сборники тезисов указанных конференций.

Участие в проектах БРФФИ.

Настоящая работа выполнялась в рамках НИР "Асимптотические свойства решений обыкновенных и стохастических дифференциальных уравнений в бесконечномерных пространствах"(2014 – 2016 гг.) при поддержке БРФФИ.

Публикации.

1. Асимптотические свойства решений обыкновенных и стохастических дифференциальных уравнений в бесконечномерных пространствах : отчет о НИР (заключительный) / БГУ; руководитель М.М.Васьковский — Минск, 2016. — 122 с. — ГР 20142883.

2. *Васьковский, М.М.* Исследование устойчивости решений неавтономных стохастических дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами с помощью метода функций Ляпунова / М.М. Васьковский, Я.Б. Задворный, И.В. Качан // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: физ., мат., информ. — 2015, №3.

3. *Васьковский М.М.,* Теорема об устойчивости по линейному приближению решений стохастических дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами / М.М. Васьковский, И.В. Качан // Тез. докл. 8-го междунар. научн. семинара (воркшопа) «АМАДЕ-2015», 15 сент., 2015. — ОСК «Стайки», 2015.

4. *Качан И.В.,* Экспоненциальная устойчивость решений систем дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами / И.В. Качан // Тез. докл. международной математической конференции «6 Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям», 9 дек., 2015. — БГУ, 2015.

5. *Васьковский М.М.,* Устойчивость стохастических дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах / М.М. Васьковский, И.В. Качан // Тез. докл. 12-й Белорусской математической конференции, 7 сент., 2016. — БГУ, 2016.

6. *Васьковский, М.М.* Устойчивость решений стохастических дифференциально-функциональных уравнений в гильбертовых пространствах с локально липшициевыми коэффициентами / М.М. Васьковский., И.В. Качан // Дифференц. уравнения. — 2017. — в печати.