

**Побегайло А. П. Применение кватернионов в компьютерной геометрии и графике / А. П. Побегайло.** - Минск : БГУ, 2010. - 216 с.



**ISBN 978-985-518-281-9**

В монографии рассмотрены математические основы кватернионов и их использование для представления поворотов. Предложены алгоритмы для моделирования сплайн-кривых на поверхностях двумерной и трехмерной сфер с использованием гладких деформаций орбит однопараметрических подгрупп группы поворотов.

Для специалистов в области компьютерной геометрии, графики и робототехники.

Ил. 21. Библиогр.: 78 назв.

## Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	3
Глава 1. МНОГООБРАЗИЯ И ГРУППЫ ЛИ	5
1.1. Многообразия	5
1.2. Гладкие многообразия	7
1.3. Явное описание гладких многообразий	10
1.4. Неявное описание гладких многообразий	12
1.5. Группы	14
1.6. Гомоморфизм групп	16
1.7. Изоморфизм групп	18
1.8. Подгруппы	20
1.9. Группы Ли	21
1.10. Однопараметрические подгруппы группы Ли	23
1.11. Действие группы на многообразии	24
1.12. Орбиты	25
1.13. Группы преобразований	27
1.14. Гомотопии кривых	29
Глава 2. КВАТЕРНИОНЫ	32
2.1. Определение кватерниона	32
2.2. Линейные операции над кватернионами	33
2.3. Умножение кватернионов	34
2.4. Сопряженные кватернионы	37
2.5. Скалярное произведение кватернионов	38
2.6. Норма кватерниона	39
2.7. Обратные кватернионы	40
2.8. Ортогональные кватернионы	43
2.9. Векторное произведение кватернионов	44

2.10. Группа единичных кватернионов	47
2.11. Ортогональные единичные кватернионы	50
2.12. Дифференцирование кватернионов по параметру	52
Глава 3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОВОРОТОВ	59
3.1. Матричная группа $SO(3, R)$	59
3.2. Автоморфизмы сферы	62
3.3. Геометрическое построение поворота	63
3.4. Представление поворотов матрицами группы $SO(3, R)$	65
3.5. Собственные векторы и значения поворотов	69
3.6. Матричная группа $SO(2)$	72
3.7. Спин матрицы Паули	74
3.8. Представление поворотов матрицами группы $SO(2)$	75
3.9. Параметры Кэли -Клейна	77
3.10. Гомоморфизм между группами $SO(2)$ и $SO(3, R)$	78
3.11. Представление поворотов единичными кватернионами	84
3.12. Гомоморфизм между группой $SO(3, R)$ и группой единичных кватернионов.	85
3.13. Геометрический смысл единичных кватернионов	87
Глава 4. ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ПОВОРОТОВ	91
4.1. Ориентация	91
4.2. Вектор конечного поворота	93
4.3. Параметры Родрига	96
4.4. Параметры Эйлера	99
4.5. Композиция векторов конечных поворотов	101
4.6. Касательные векторы	103
Глава 5. СФЕРА $S^2$	109
5.1. Определение сферы $S^2$	109
5.2. Касательная плоскость	110
5.3. Плоские сечения	111
5.4. Геодезические линии на сфере	114
5.5. Орбиты поворотов	118
5.6. Действие поворотов на сферу $S^2$	119
5.7. Параметризованные дуги окружностей	120
Глава 6. СФЕРА $S^3$	123
6.1. Определение сферы $S^3$	123
6.2. Касательная плоскость	124
6.3. Плоские сечения	125
6.4. Геодезические линии на сфере	127
6.5. Орбиты поворотов	131
6.6. Действие поворотов на сферу $S^3$	135
6.7. Параметризованные дуги больших окружностей	136
6.8. Параметризованные дуги малых окружностей	138
Глава 7. ДЕФОРМАЦИЯ И СГЛАЖИВАНИЕ	142

ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПОДГРУПП ГРУППЫ ЛИ	
7.1. Полиномы Бернштейна	142
7.2. Дифференцирование полиномов Бернштейна	144
7.3. Интегрирование полиномов Бернштейна	147
7.4. Полиномиальный базис	149
7.5. Сглаживающие полиномы	153
7.6. Дифференцирование сглаживающих полиномов	158
7.7. Деформация однопараметрических групп Ли	160
7.8. Сглаживание однопараметрических групп Ли	164
Глава 8. МОДЕЛИРОВАНИЕ СПЛАЙН-КРИВЫХ НА СФЕРЕ $S^2$	168
8.1. Постановка задачи построения сплайн-кривой на сфере	168
8.2. Построение дуг малых окружностей по точкам	169
8.3. Деформация дуг окружностей	172
8.4. Построение сплайн-кривой на сфере	175
8.5. Постановка задачи сглаживания ломаной линии на сфере	179
8.6. Построение дуг больших окружностей по точкам	180
8.7. Сглаживание дуг окружностей	181
8.8. Сглаживание углов ломаной линии на сфере	185
Глава 9. МОДЕЛИРОВАНИЕ СПЛАЙН-КРИВЫХ НА СФЕРЕ $S^1$	188
9.1. Постановка задачи построения ориентационной сплайн-кривой	188
9.2. Построение дуг малых окружностей по ориентациям	189
9.3. Деформация ориентационных дуг	192
9.4. Построение ориентационной сплайн-кривой	196
9.5. Постановка задачи сглаживания ориентационной ломаной	199
9.6. Построение дуг больших окружностей по ориентациям	200
9.7. Сглаживание ориентационных дуг	201
9.8. Сглаживание углов ориентационной ломаной линии	205
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	208
ЛИТЕРАТУРА	